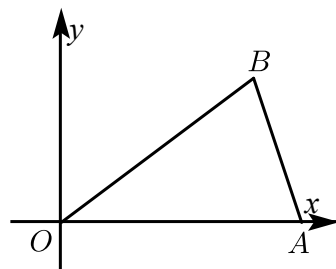


第1讲 四边形存在性问题（练习）

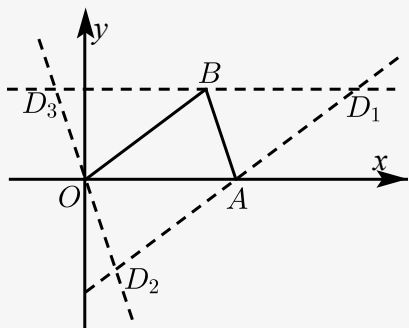
一、 已知三点求第四点坐标

1. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(5, 0)$ ， $B(4, 3)$ ．若平移点 B 到点 D ，使以 O 、 A 、 D 、 B 为顶点的四边形是平行四边形，则点 D 的坐标是 _____ ．



【答案】 $(9, 3)$ ， $(1, -3)$ ， $(-1, 3)$

【解析】 分别以 A ， B ， O 作关于 OB ， OA ， AB 的平行线交于 D_1 ， D_2 ， D_3 点，



①以 AB 为对角线时，

$\because A(5, 0)$ ， $B(4, 3)$ ，

由平行四边形对角线互相平分可知： AB 中点即为 OD_1 中点，

$$\therefore \begin{cases} x_A + x_B = x_O + x_{D_1} \\ y_A + y_B = y_O + y_{D_1} \end{cases}$$

$\therefore D_1(5 + 4 - 0, 0 + 3 - 0)$ ，即 $(9, 3)$ ．

②以 OA 为对角线时，

同理 $D_2(0 + 5 - 4, 0 + 0 - 3)$ ，即 $(1, -3)$ ．

③以 OB 为对角线时，

$D_3(0 + 4 - 5, 0 + 3 - 0)$ 即 $(-1, 3)$ ．

故答案为： $(9, 3)$ ， $(1, -3)$ ， $(-1, 3)$ ．

【标注】【知识点】平行四边形的存在性

2. 已知直角坐标系内有四个点 $A(-2, 2)$, $B(3, 5)$, $C(0, 8)$, D , 若以 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形是平行四边形, 则 D 点坐标为 _____ .

【答案】 $(1, -1)$ 或 $(-5, 5)$ 或 $(5, 11)$

【标注】【知识点】平行四边形的存在性

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(3, 1)$, 若以 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形是平行四边形, 则点 D 的坐标是 _____ .

【答案】 $(-2, 0)$ 或 $(4, 0)$ 或 $(2, 2)$

【解析】 平行四边形, 对角线互相平分,

由中点公式可知:

若以 AB 为对角线, 则 $D(-2, 0)$;

若以 BC 为对角线, 则 $D(4, 0)$;

若以 AC 为对角线, 则 $D(2, 2)$;

综上所述, D 的坐标为 $(-2, 0)$ 或 $(4, 0)$ 或 $(2, 2)$.

【标注】【知识点】平行四边形性质综合应用

4. 在平面直角坐标系中, 已知 $A(-2, 3)$, $B(2, -1)$, $C(4, 4)$, 若以点 A , B , C , D 为顶点的四边形是平行四边形, 则点 D 的坐标为 _____ .

【答案】 $(8, 0)$ 或 $(-4, -2)$ 或 $(0, 8)$

【解析】 分三种情况: ① BC 为对角线时, 点 D 的坐标为 $(8, 0)$,

② AB 为对角线时, 点 D 的坐标为 $(4, -2)$,

③ AC 为对角线时, 点 D 的坐标为 $(0, 8)$,

综上所述, 点 D 的坐标可能是 $(8, 0)$ 或 $(-4, -2)$ 或 $(0, 8)$,

故答案为: $(8, 0)$ 或 $(-4, -2)$ 或 $(0, 8)$.

【标注】【知识点】平行四边形的存在性

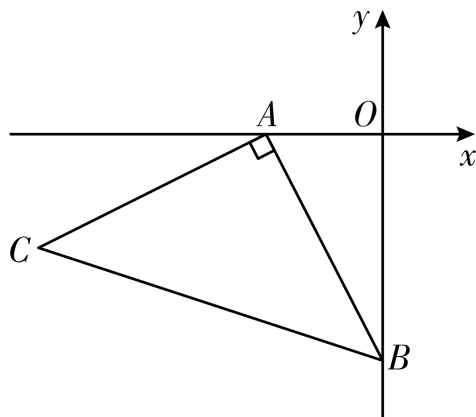
5. 在平面直角坐标系内 A , B , C 三点的坐标分别是 $(-4, 0)$, $(2, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$, 以 A , B , C 三点为顶点画平行四边形, 则第四个顶点坐标为 _____ .

【答案】 $D_1\left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ 、 $D_2\left(-\frac{11}{2}, \frac{9}{2}\right)$ 、 $D_3\left(\frac{13}{2}, \frac{9}{2}\right)$

【标注】【知识点】平行四边形的存在性

二、与平面直角坐标系综合

6. 如图， $OA = 2$ ， $OB = 4$ ，以点 A 为顶点、 AB 为腰在第三象限内作等腰直角三角形 ABC 。



(1) 求点 C 的坐标。

(2) 在平面内是否存在一点 H ，使得以 A 、 C 、 B 、 H 为顶点的四边形为平行四边形？若存在，请直接写出点 H 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) 见解析

(2) 见解析

【解析】(1) 解：如图1，过点 C 作 $CM \perp x$ 轴于点 M ，

$$\because \angle MAC + \angle OAB = 90^\circ, \angle OAB + \angle OBA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MAC = \angle OBA.$$

在 $\triangle MAC$ 和 $\triangle OBA$ 中，

$$\begin{cases} \angle CMA = \angle AOB = 90^\circ \\ \angle MAC = \angle OBA \\ AC = AB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle MAC \cong \triangle OBA (\text{AAS}),$$

$$\therefore CM = OA = 2, MA = OB = 4,$$

$$\therefore OM = OA + AM = 2 + 4 = 6,$$

$$\therefore \text{点} C \text{的坐标为} (-6, -2).$$

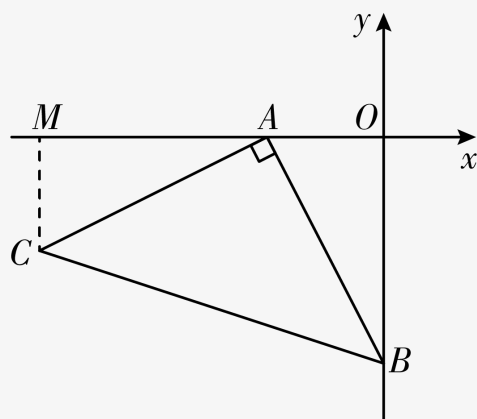


图1

(2) 解：如图2，存在三个 H 点，

$$\because A(-2, 0), B(0, -4), C(-6, -2),$$

$\therefore$ 根据点 B 到点 A 的平移规律可得点 C 到点 H_1 的平移规律，则 $H_1(-8, 2)$ ，

同理得 $H_2(-4, -6)$ 、 $H_3(4, -2)$ 。

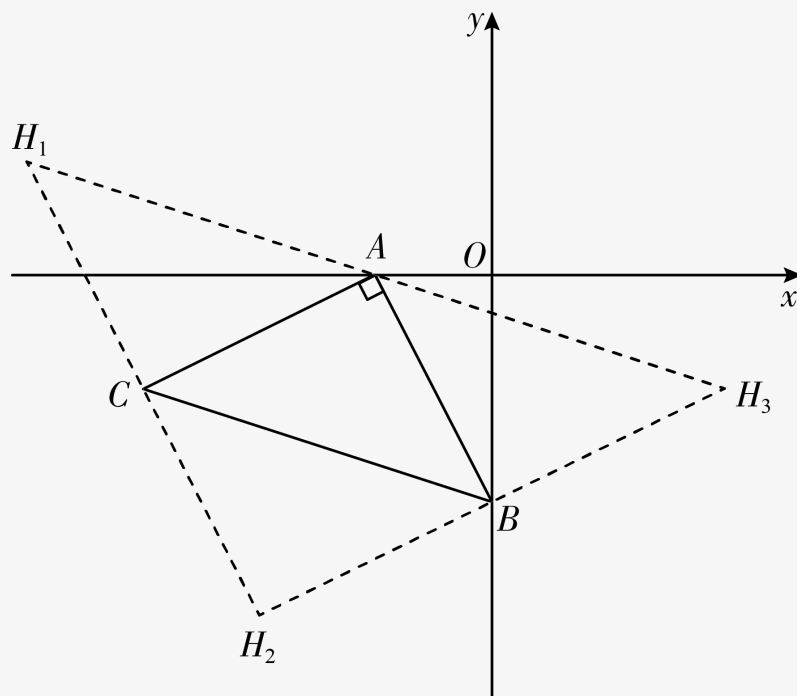
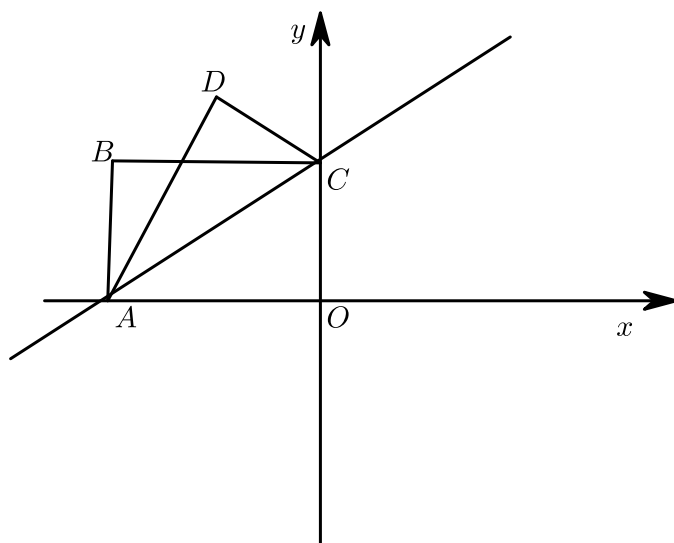


图2

【标注】【知识点】线段差的绝对值最大

7. 如图，在平面直角坐标系中，已知矩形 $OABC$ 的两个顶点 A 、 B 的坐标分别 $A(-2\sqrt{3}, 0)$ 、 $B(-2\sqrt{3}, 2)$ ， $\angle CAO = 30^\circ$ 。



- (1) 求对角线 AC 所在的直线的函数表达式 .
- (2) 把矩形 $OABC$ 以 AC 所在的直线为对称轴翻折, 点 O 落在平面上的点 D 处, 求点 D 的坐标 .
- (3) 在平面内是否存在点 P , 使得以 A 、 O 、 D 、 P 为顶点的四边形为平行四边形? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由 .

【答案】 (1) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$.

(2) $(-\sqrt{3}, 3)$.

(3) 存在; $(\sqrt{3}, 3)$ 或 $(-\sqrt{3}, 3)$ 或 $(3\sqrt{3}, 3)$.

【解析】 (1) $\because \angle CAO = 30^\circ$, $\angle AOC = 90^\circ$,

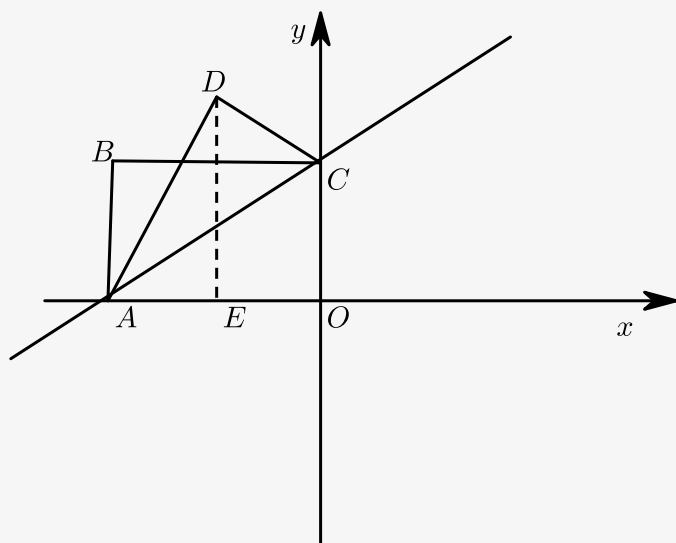
$$\therefore OA = \sqrt{3}OC,$$

而 A 坐标 $(-2\sqrt{3}, 0)$,

所以 $OC = 2$, C 坐标 $(0, 2)$,

由待定系数法, 可得 AC 所在直线解析式为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$.

(2) 过点 D 作 $DE \perp OA$ 于点 E ,



$$\because \angle CAO = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = 60^\circ,$$

$$\text{又} \because AD = AO = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore DE = 3, AE = \sqrt{3},$$

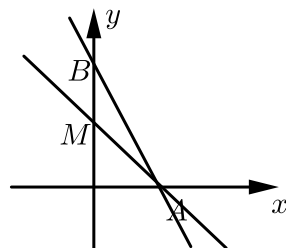
$$\therefore OE = \sqrt{3},$$

故点D的坐标为 $(-\sqrt{3}, 3)$.

(3) 存在点P的坐标, 使得以A、O、D、P为顶点的四边形为平行四边形, 点P的坐标为 $(\sqrt{3}, 3)$ 或 $(-\sqrt{3}, 3)$ 或 $(3\sqrt{3}, 3)$.

【标注】【知识点】平行四边形的存在性

8. 如图, 在平面直角坐标系中, 函数 $y = -2x + 12$ 的图象分别交 x 轴, y 轴于A、B两点, 过点A的直线交 y 正半轴于点M, 且点M为线段OB的中点.



- (1) 求直线AM的函数解析式.
- (2) 试在直线AM上找一点P, 使得 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle AOB}$, 请直接写出点P的坐标.
- (3) 在坐标平面内是否存在点C, 使以A、B、M、C为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 请直接写出点C的坐标, 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $y = -x + 6$.

(2) $(-6, 12)$ 或 $(18, -12)$.

(3) $C_1(-6, 18)$, $C_2(6, -6)$, $C_3(6, 6)$.

【解析】(1) $\because$ 直线 AB 的函数解析式 $y = -2x + 12$,

$\therefore A(6, 0)$, $B(0, 12)$.

又 $\because M$ 为线段 OB 的中点,

$\therefore M(0, 6)$.

设直线 AM 的解析式为: $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} 6k + b = 0 \\ b = 6 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -1 \\ b = 6 \end{cases},$$

故直线 AM 的解析式 $y = -x + 6$.

(2) 设点 P 的坐标为: $(x, -x + 6)$,

$$\therefore AP = \sqrt{(x-6)^2 + (-x+6)^2} = \sqrt{2}|x-6|,$$

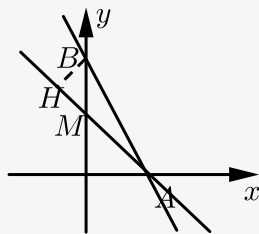
过点 B 作 $BH \perp AM$ 于点 H ,

$\because OA = OM$, $\angle AOM = 90^\circ$,

$\therefore \angle AMO = 45^\circ$,

$\therefore \angle BMH = 45^\circ$,

$$\therefore BH = BM \cdot \sin 45^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2},$$



$$\therefore S_{\triangle ABP} = S_{\triangle AOB},$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times OA \times OB = \frac{1}{2} \times 6 \times 12 = 36,$$

$$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times AP \times BH = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}|x-6| \times 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times \sqrt{2}|x-6| \times 3\sqrt{2} = 36,$$

解得: $x = -6$ 或 $x = 18$,

故点 P 的坐标为: $(-6, 12)$ 或 $(18, -12)$.

(3) 当 AB 做平行四边形的边时, $AB = MC$, 且 $AB \parallel MC$,

$\because A(6, 0)$, $B(0, 12)$, $M(0, 6)$, 从点 A 到点 B , 向左平移 6 个单位, 向上平移 12 个单位,

$$\therefore 0 - 6 = -6, 6 + 12 = 18, \therefore C_1(-6, 18),$$

从点 B 到点 A ，向右平移6个单位，向下平移12个单位，

$$0 + 6 = 6, 6 - 12 = -6, \therefore C_2(6, -6).$$

当 AB 做平行四边形的对角线时，设 AB 、 MC 相交于点 O ，

$$\text{则 } AO = BO = MO = CO,$$

$$\text{由中点坐标公式，得到点 } O \text{ 的坐标为，} x = \frac{1}{2} \times (6 + 0) = 3,$$

$$y = \frac{1}{2} \times (0 + 12) = 6,$$

$$\therefore O(3, 6),$$

设点 $C(x, y)$ ， $\because CM$ 的中点为 $O(3, 6)$ ，

$$\therefore \frac{1}{2} \times (x + 0) = 3, \therefore x = 6,$$

$$\frac{1}{2} \times (y + 6) = 6, y = 6,$$

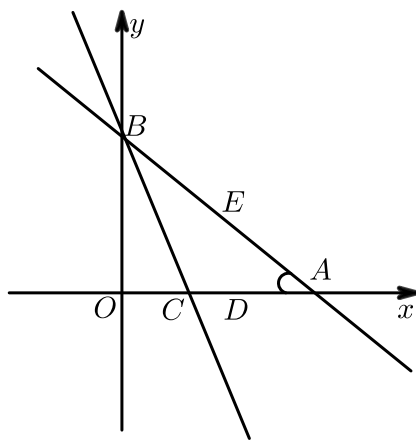
$$\therefore C_3(6, 6).$$

综上所述， $C_1(-6, 18)$ ， $C_2(6, -6)$ ， $C_3(6, 6)$ 。

【标注】【知识点】一次函数与平行四边形

9. 已知直线 $y = -\frac{3}{4}x + 6$ 与 x 轴， y 轴分别相交于点 A ， B ，将 $\angle OBA$ 对折，使点 O 的对应点 E 落在直线 AB 上，折痕交 x 轴于点 C 。

(1) 求点 C 的坐标和直线 BC 的函数表达式。

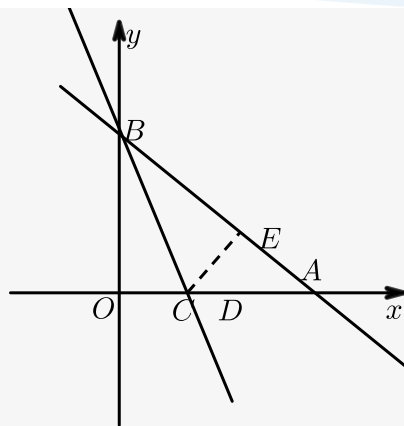


- (2) 若已知 x 轴上有一点 $D(4, 0)$ ，点 M 为直线 AB 上一点，点 N 为直线 BC 上一点，是否存在这样的点 M 、 N ，使得以点 A 、 D 、 M 、 N 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，求出点 M 的坐标、若不存在，说明理由。

【答案】(1) $C(3, 0)$ ； $y = -2x + 6$ 。

(2) 存在 $\left(\frac{32}{5}, \frac{6}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{32}{5}, \frac{54}{5}\right)$ 或 $\left(\frac{48}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ 。

【解析】(1) 连接 CE ，则 $CE \perp AB$ ，



$\therefore y = -\frac{3}{4}x + 6$ 与 x 轴, y 轴分别相交于点 A, B ,

$\therefore A(8,0), B(0,6)$, 则 $AB = 10$,

设: $OC = a$, 则 $CE = OC = a$,

$\therefore BE = OB = 6$,

$\therefore AE = 10 - 6 = 4, CA = 8 - a$,

在 $\text{Rt}\triangle CAE$ 中, 由勾股定理得: $CA^2 = CE^2 + AE^2$,

即 $(8 - a)^2 = a^2 + 4^2$,

解得: $a = 3$,

$\therefore C(3,0)$,

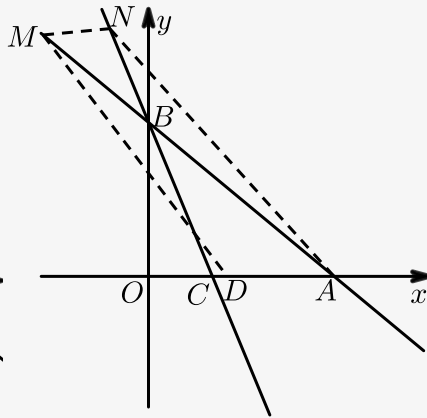
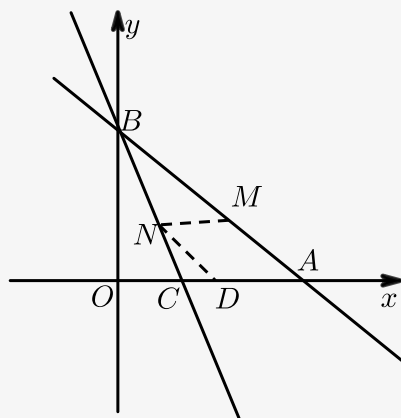
将 $B(0,6)C(3,0)$ 代入一次函数,

表达式: $y = kx + b$ 得: $\begin{cases} 6 = 0 + b \\ 0 = 3k + b \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = -2 \\ b = 6 \end{cases}$,

直线 BC 的表达式为: $y = -2x + 6$.

(2) $AD = 4$, 设 $M\left(m, -\frac{3}{4}m + 6\right), N(n, -2n + 6)$,

①当 AD 是平行四边形的边时, 则 $MN = AD$, 是 $MN \parallel AD$, 如图:



则 $\begin{cases} -\frac{3}{4}m + 6 = -2n + 6 \\ m - n = \pm 4 \end{cases}$,

解得: $m = \pm \frac{32}{5}$,

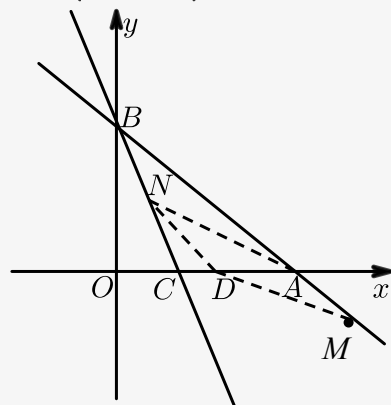
$$\therefore M\left(\frac{32}{5}, \frac{6}{5}\right) \text{ 或 } \left(-\frac{32}{5}, \frac{54}{5}\right).$$

②当 AD 是平行四边形的对角线时，由中点公式可得：

$$\begin{cases} m+n=6+6 \\ -\frac{3}{4}m+6-2n+6=0 \end{cases}$$

解得： $m = \frac{48}{5}$ ，

$$\therefore M\left(\frac{48}{5}, -\frac{6}{5}\right),$$



综上所述： $M\left(\frac{32}{5}, \frac{6}{5}\right) \text{ 或 } \left(-\frac{32}{5}, \frac{54}{5}\right) \text{ 或 } \left(\frac{48}{5}, -\frac{6}{5}\right).$

【标注】【知识点】一次函数与轴对称最值问题